1. *Решение.* Например, подходит число

$$98987676545431312020$$

(существуют и другие примеры). Поскольку $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$, число делится на 2020, если оно делится на 4, 5 и 101. Приведённое число оканчивается на 20, следовательно, делится на 4 и 5. Числа вида $\overline{abab}$ равны $101 \cdot \overline{ab}$, а поскольку приведённое число раскладывается в сумму чисел вида $\overline{abab} \cdot 10^k$, оно делится на 101.

2. *Ответ.* Нет, не существует.

Решение. Покажем, что любая функция, удовлетворяющая условиям, имеет период 3. Действительно, из уравнения следует, что f не принимает значения 1. В самом деле, если $f(x) = 1$, то $f(x+1) = f(x+1) + 1$, что невозможно. Следовательно, $f(x+1) = \frac{1}{1-f(x)}$, поэтому, применяя последовательно это равенство, получаем

$$f(x+3) = \frac{1}{1-f(x+2)} = \frac{f(x+1)-1}{f(x+1)} = 1 - \frac{1}{f(x+1)} = f(x).$$

3. См. решение задачи 4 для 9 класса.

4. *Ответ.* 23.

Решение. Каждый двухклеточный прямоугольник содержит чёрную и белую клетки, поэтому если вырезано 9 белых клеток, то больше $32 - 9 = 23$ прямоугольников вырезать не получится.

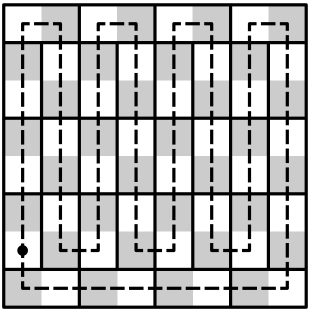


Рис. 1

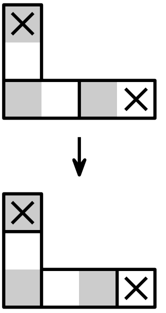


Рис. 2

Разрежем доску так, как показано на рис. 1. Вырезанные из доски клетки при разрезании «испортят» не более 10 прямоугольников. Следовательно, у нас уже есть по крайней мере 22 целых прямоугольника. Покажем, как увеличить количество целых прямоугольников на 1. Рассмотрим изображённую на рис. 1 замкнутую цепочку клеток (по цепи идём от клетки a2 вверх). Поскольку вырезаны как белые, так и чёрные клетки, в этой цепи обязательно есть вырезанная белая клетка, за которой идёт вырезанная чёрная клетка. Если эти клетки соседние, то они «портят» только один прямоугольник, значит, при таком разрезании будет не менее 23 целых прямоугольников. В противном случае, если между ними есть ещё клетки, разделим доску между ними так, чтобы новый прямоугольник начинался сразу после вырезанной белой клетки (см. рис. 2). Тогда количество целых прямоугольников увеличится на 1. Следовательно, опять будет не менее 23 целых прямоугольников.

5. *Ответ.* Да, существует.

Первое решение. Покажем, что если у тетраэдра два скрещивающихся ребра перпендикулярны и имеют длины a и b, то существует сечение тетраэдра, которое является квадратом со стороной $ab/(a+b)$.

Разделим четыре остальных ребра тетраэдра в отношении $k:(1-k)$, считая от концов ребра длины b (см. рис. 1). Соединив точки деления, получим сечение, которое является параллелограммом со сторонами длины ka и $(1-k)b$ в силу подобия треугольников. На самом деле, это сечение является прямоугольником, поскольку стороны параллелограмма параллельны перпендикулярным рёбрам тетраэдра по обратной теореме Фалеса и, следовательно, тоже перпендикулярны. Осталось подобрать k таким образом, чтобы стороны прямоугольника были равны, т. е. $ka=(1-k)b$, откуда $k=b/(a+b)$. При этом сторона получившегося квадрата будет равна $ka=ab/(a+b)$.

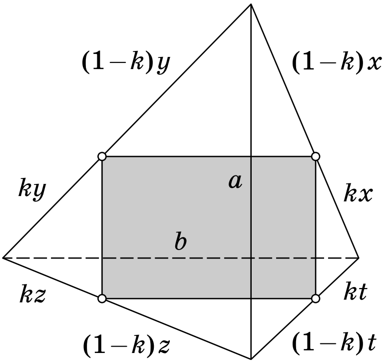


Рис. 1

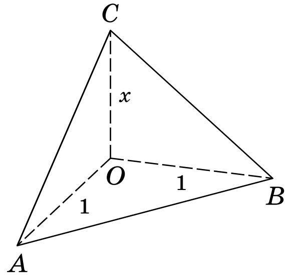


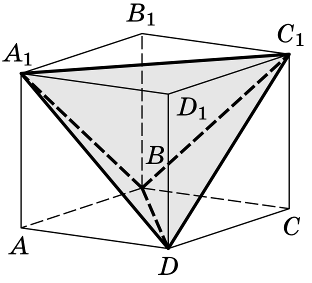
Рис. 2

Рассмотрим теперь три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Отложим на этих прямых от точки O отрезки $OA=1$, $OB=1$, $OC=x$, где x — некоторый параметр (см. рис. 2). В тетраэдре $OABC$ есть три пары скрещивающихся перпендикулярных рёбер: ребро OC перпендикулярно плоскости OAB, следовательно, перпендикулярно ребру AB, лежащему в этой плоскости; аналогично рёбра OA и OB перпендикулярны рёбрам BC и AC соответственно. Покажем, что можно подобрать параметр $x>0$ так, что сторона одного из построенных квадратных сечений будет в 100 раз больше стороны другого. Рассмотрим пару перпендикулярных скрещивающихся рёбер CO и AB длин x и $\sqrt{2}$. По доказанному утверждению длина стороны соответствующего квадратного сечения равна $c_1(x)=x\sqrt{2}/(x+\sqrt{2})$. Теперь возьмём пару перпендикулярных скрещивающихся рёбер OA и CB длины 1 и $\sqrt{x^2+1}$. Сторона соответствующего квадратного сечения будет равна $c_2(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{c_2(x)}{c_1(x)}$. Она непрерывна при $x>0$ и $f(1)=1$. Далее, $c_2(x)>\dfrac{1}{2}$, поэтому $f(x)>\dfrac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}x}>\dfrac{1}{2x}$

(при $x > 0$), т. е. $f(1/200) > 100$. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке $[1/200; 1]$ существует такое x^*, что $f(x^*) = 100$. Для найденного x^* возьмём получившийся тетраэдр $OABC$. Искомый тетраэдр подобен $OABC$ с коэффициентом подобия $1/c_1(x^*)$.

Второе решение. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковые грани которого являются квадратами с диагоналями, равными 200, а верхняя и нижняя грани — ромбы. Рассмотрим тетраэдр A_1BDC_1 (см. рис.). Поскольку диагонали граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны, а диагонали его противоположных граней попарно параллельны, пары скрещивающихся рёбер тетраэдра перпендикулярны. Согласно первому решению у такого тетраэдра есть три квадратных сечения, параллельных парам его скрещивающихся рёбер. Сторона квадратного сечения тетраэдра, параллельного рёбрам A_1B и C_1D, будет равна 100. Покажем, что можно выбрать ромб в верхнем и нижнем основании параллелепипеда таким образом, что квадратное сечение тетраэдра, параллельное рёбрам A_1C_1 и BD, будет иметь сторону длины 1. Спроектируем параллелепипед на верхнюю грань, при этом рёбра тетраэдра A_1BDC_1 спроектируются на стороны ромба $A_1B_1C_1D_1$, а квадрат сечения тетраэдра, параллельного прямым BD и A_1C_1, спроектируется в равный ему квадрат, вершины которого будут лежать на сторонах ромба $A_1B_1C_1D_1$. Сторона вписанного в ромб квадрата не превосходит меньшей диагонали ромба, поэтому, устремляя длину меньшей диагонали ромба к 0, получим квадрат со стороной, сколь угодно близкой к нулю. В тоже время, если в качестве ромба взять квадрат, то сторона вписанного квадрата будет равна 100. В силу непрерывности изменения длины стороны вписанного квадрата найдётся такой ромб, что сторона вписанного в него квадрата равна 1, что и требовалось.



6. *Решение.* Рассмотрим набор из 2^k подряд идущих чисел, квадраты этих чисел имеют тот же набор остатков при делении на 2^k, что и набор чисел 1^2, 2^2, 3^2, ..., $(2^k)^2$. Поскольку

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(2^k)^2 = \\ = \frac{2^k(2^k+1)(2\cdot 2^k+1)}{6} = 2^{k-1}\frac{(2^k+1)(2\cdot 2^k+1)}{3},$$

сумма квадратов 2^k подряд идущих чисел делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k.

Представим число $2n$ в виде $2^k\cdot l$, где l нечётно. Тогда сумма $2n$ последовательных квадратов разбивается на l сумм вида $2^{k-1}t_i$, где все t_i нечётны, поэтому вся сумма также делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k. Следовательно, наибольшая степень двойки, на которую делится сумма квадратов $2n$ последовательных чисел, зависит только от n, но не от самих чисел.

В то же время сумма квадратов имеющихся чисел после замены удваивается. Действительно, заменив числа a и b на $a-b$ и $a+b$, получим: $(a-b)^2+(a+b)^2=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$. Таким образом, снова получить набор из $2n$ подряд идущих чисел нельзя.